

Fraktal geometri, yaklaşık çeyrek asırdır bilim dünyasının gündeminde olan ve doğadaki karmaşık biçim ve süreçleri gittikçe daha iyi anlamamıza yardımcı olan özel bir geometri dalıdır (daha geniş bilgi için [“Kaosun Resmi: Fraktal Geometri” başlıklı yazıma](#) bakabilirsiniz). Bu geometri dalı, orta öğretimden beri bildiğimiz Öklit (Euclid) geometrisinden çok farklıdır. Tamamen matematiksel soyutlamalardan ibaret olan Öklit geometrisi, bildiğimiz üçgenlerin, doğruların, karelerin ve küplerin geometrisidir. Teknoloji ve matematik alanında çokça işimize yaramasına rağmen, bu geometri doğadaki biçim ve süreçleri açıklama konusunda bize ancak sınırlı bilgi verebilmektedir. Fraktal geometriyi bugün bildiğimiz boyutlara taşıyarak bilim dünyasındaki yerini almasını sağlayan Benoit Mandelbrot, dağların konilere, yıldırımların düz çizgilere, kıyı şeritlerinin eğrilere, bulutların dairelere benzemediğine vurgu yaparak, doğayı anlamak için yeni bir geometriye ihtiyacımız olduğunu söylüyor ([Fractal Geometri of Nature; B. Mandelbrot](#)).

1980’li yıllarda söylediği bu sözlerinde ne kadar haklı olduğunu çok kısa bir süre geçtikten sonra anlaşıldı. Fraktal geometri daha sonraki bölümde örneklerini vermeye çalışacağım gibi, bir çok yeni anlayış ve analiz yönteminin doğuşuna zemin hazırladı. Bu gün özellikle biyolojide, canlı süreçleri ve yapıları anlayacak yepyeni yöntemlerimiz mevcut. Bu yöntemlerin bir çoğunda “fraktal” bakış açısının izlerini görebilirsiniz.

Fraktal (Kesirli) Boyutlar

Fraktal geometrinin anlayışımıza kattığı önemli bir kavram da “fraktal boyut” kavramıdır. Boyut dediğimiz şey, özellikle soyut içerimleri olan bir kavramdır. Bildiğimiz gibi, matematikte “nokta”, boyutsuz bir kavramı temsil etmek için kullanılır. Benzer şekilde, eğrilik ve karmaşıklığına bakılmaksızın bir çizgi (yahut eğri) tek boyutlu, bir yüzey iki boyutlu ve katı nesneler üç boyutlu olarak bilinir. Einstein’ın görelilik kuramından sonra, içinde yaşadığımız üç boyutlu evrene bir de dördüncü zaman boyutu ilave edildi. Fakat bizim yapısal (geometrik) anlamda kavrayabildiğimiz boyutların sayısı üçtür. Zira içinde yaşadığımız mekanlar üç boyutludur (yahut biz o kadarını algılayabildiğimiz için bize öyle gelir). Dolayısıyla dünyamızdaki tüm maddesel nesneler gerçekte

bizim için üç boyutludur (ne kadar ince olsalar da en, boy ve yükseklikleri vardır). Daha alt boyutlar (iki, bir ve sıfır boyut) bizim için ancak kavramlardan ibarettirler; bunlarla gerçek hayatımızda karşılaşmayız. Eğer ortaöğretim sırasında nokta, eğri, doğru veya yüzeylerden kafası karışanlardansanız, bu kısmı seveceksiniz: Fraktal geometri bizlere bu bildiğimiz boyutlara ilaveten kesirli (fraktal) boyutları armağan etti! Fraktal geometri sonrası 1,23 boyutlu çizgilerden, 2,355 boyutlu yüzeylerden bahsedebiliyoruz artık. Peki bunlar nedir ve bizim için gerçekten önemli midir?

Fraktal boyut, bir yapının karmaşıklığını bize gösteren oldukça faydalı bir sayısal değerdir. Bir üçgenin, yahut bir dairenin kenarlarını oluşturan çizgilerin, yahut o izgileri oluşturan sonsuz sayıda noktanın boyutunu belirlemekte bir zorluğumuz yok. Sonuçta tüm Öklit biçimleri sıfır, bir, iki ve üç boyutlu bileşenlerden oluşurlar. Gerçek dünyada da sağduyumuz (beynimizin kolaylaştırıcı işlevleri sayesinde) boyut tesbitinde zorlanmaz. Ayakkabımızın biraz çok-birimli bir yapısı olsa da, üç boyutlu bir nesne olduğunu biliriz. Ayakkabımızın dış yüzeyi ise, kuramsal olarak iki boyutlu bir yüzey olarak düşünülebilir. Evimizde duvara asılı durumda duran bir ayna da böyledir. Düz bir aynanın yüzeyi aslında iki boyutlu bir yüzey örneğidir. Sağduyumuzun bize söylediği budur ama, aslında gerçek biraz daha farklıdır.

Ayakkabınızın, yahut aynanızın yüzeyine mikroskopla baktığınızı düşünün. Ayakkabınızın yüzeyi (hele bir de, örneğin, süet bir ayakkabı ise) mikroskopik olarak karmakarışık bir yapıya sahiptir ve asla, dışarıdan bakıldığı zaman görüldüğü gibi dümdüz değildir. Ayna için de aynı şey geçerlidir: Güçlü bir mikroskopla baktığınızda göreceğiniz görüntü, eğer daha önce görmediyseniz sizi kesinlikle şaşırtacaktır. O güzelce sırlanmış ve düzeltilmiş aynanızın yüzeyi girinti ve çıkıntılarla, (tabir yerindeyse) dağlar ve vadilerle doludur. Bu görüntülerde gördüğünüz yapıları artık iki boyutlu yüzeyler olarak görmekte zorlanmaya başlarsınız. İşte fraktal boyut kavramı da burada devreye girer. Gördüğünüz şeyi matematiksel olarak bir-iki-üç boyuttan herhangi birine oturtamıyorsanız, ara değerler, tercih etmeyi düşünebilirsiniz. Fraktal geometrinin de bize sağladığı avantaj budur.

Fraktal biçimler, sonsuz kenar uzunlukları olmasına rağmen sonlu (sınırlı) alanları çeviren şekiller içerir ([Koch kar tanesi](#) , [Sierpinski üçgeni](#) , [Mandelbrot kümesi](#) gibi). Bu yapıların sınırlarını oluşturan çizgiler o denli karmaşıktır ki, bunları tek boyutlu çizgiler olarak nitelemek matematiksel olarak artık doğru değildir. Zira bu şekillerdeki kenarları oluşturan algoritma (matematiksel bir fonksiyonun tekrar tekrar hesaplanması anlamında) bir “iterasyon”dur ve iterasyon sonsuza ilerlerken ilginç bir şey olur: Kenar uzunluğu sonsuza giderken, alan hep sınırlı kalır. Bunu anlamak için, bir dairenin içine, kareden başlayarak kenar sayıları gittikçe artan çokgenler yerleştirdiğimizi düşünebiliriz (soldaki şekil). Kare dört kenarlıdır; çevresi ise kenar uzunluğunun dört katıdır. Şimdi, ilk çemberimizin içinde kalmak şartı ile kenar sayımızı artıralım: Beşgen, altıgen, yedigen, sekizgen... Daire içine yerleştirdiğimiz şekillerin kenar sayısı arttıkça iki şey olur: Öncelikle kenar uzunlukları kısalır ve kenar sayısı artsa da, uzunluğun kısalmasına bağlı olarak toplam çokgen çevresi gittikçe azalan bir hızla artar. İkinci olarak da, çokgenimizin kenar sayısını artırmakla, çokgenin kenar uzunluğunu daireye gittikçe daha çok yaklaştırırız. Fakat kaç kenarlı olursa olsun, çokgenlerimizin çevresi asla daireyle eşit olmayacaktır; ta ki, çokgenimizin kenarları, daireyi oluşturan çemberin “eğri kenarına” dönüşene kadar. İşte bu süreç içinde sonsuz kenar kullanabiliriz; fakat toplam alanımız yine de ilk dairemizin alanından daha küçük, yani sınırlı olacaktır.

İşte fraktal biçimler, böyle garip şeylerdir! Fraktal boyut ölçümü için matematikte Hausdorff-Besicovitch boyutu kavramı sıkça kullanılır. Kısaca tanımlamak gerekirse “bir yapıyı (örneğin bir çizgiyi) kaplamak için gereken disklerin çapı ve sayısı arasındaki ilişki” olarak ifade edilebilir. Formül olarak da D (Hausdorff-Besicovitch boyutu) = $\lim_{h \rightarrow 0} [\log N(h)] / [\log(1/h)]$ olarak verilir. Burada $N(h)$, kaplamak için gerekli olan disklerin sayısı ike, $(1/h)$ ise diskin çapını belirtir. Bunu “bir birimlik bir doğru” için yapacak olursak: $[\log 2^n / \log 2^n] = 1$ olur ki, bir doğru parçasının bildiğimiz topolojik (Öklid) boyutu da birdir. Fakat bu hesabı bir Koch eğrisi için yaparsak, Koch eğrisinde kenar uzunluğu her “büyütmede” $1/3$ ’ün katları şeklinde arttığından:

Buradaki sonucu günlük tecrübeler ışığında tam olarak değerlendirmek biraz sor olabilir. Koch eğrisi aslında bir çizgi olmakla birlikte, karmaşıklığı çok fazla olduğundan, boyutu 1’den fazladır. Fakat iki boyutlu bir yüzey de değildir; dolayısıyla bu karmaşık bir çizginin boyutunu 1 ile 2 arasındaki bir sayıyla ifade etmemiz gerekir. İşte Hausdorff-Besicovitch boyutu bize bunu sağlamaktadır.

Buradan, fraktal geometri için yeni bir tanım üretebiliriz. Bazı kaynaklarda fraktal biçimlerin “fraktal (kesirli) boyutları” olduğu sıklıkla göze çarpar; yukarıda ben de benzer bir ifade kullandım. Fakat ([Peano doldurucu eğrileri](#) gibi) bazı “fraktal” yapılar böyle değildir. Onların Hausdorff-Besicovitch boyutu 2 iken, topolojik boyutları 1 olabilir (zira Peano eğrisi aslında tek boyutlu bir eğridir; alttaki şekil). Yani bazı fraktallerin de Hausdorff-Besicovitch boyutu, bir “tam sayı” olabilir.

Dolayısıyla fraktal biçimlerle ilgili daha doğru bir tanım olarak şunu söyleyebiliriz:

Fraktal, Hausdorff-Besicovitch boyutu (D) topolojik boyutundan (D_t) daha büyük ($D > D_t$) olan nesnelerin genel adıdır.

Süreçlerdeki fraktal boyutlar: Fraktal boyut kavramı, özellikle canlı dünyaya bakışımızda devrimsel değişikliklere yol açtı. Fraktal geometri dendiğinde aklımıza genellikle canlıların veya doğanın biçimsel özellikleri geliyor olabilir. Fakat fraktal geometrinin bize sağladığı faydalar, biçimleri anlamaktan da çok ötelere geçmiştir. Doğada meydana gelen bir çok olayın zaman içindeki seyirlerinin incelenmesi sonucunda, bu davranış biçimlerinin “fraktal” karakterler gösterdiği görülebilir. Örneğin, insan veya hayvanlardan, beynin aktivitesi sırasında kaydedilen EEG (elektroensefalografi) dalgaları, özel yöntemlerle incelendiğinde, sadece ekranda görüldüğü gibi “iki boyutlu çizgilerden” ibaret olmadıkları, yüksek karmaşıklığa sahip fraktal biçimler oldukları artık bilinen bir olgudur. Bunun gibi daha bir çok doğal süreçte fraktal karmaşıklık karşımıza çıkar. Hatta, daha ileriki bölümlerde değineceğimiz gibi, bir sistemin davranışındaki değişiklikleri ölçmek için “fraktal boyutlarındaki değişmelere bakmak” artık çok yaygın olarak kullanılmaya başlanan bir analiz yöntemidir.

Az önce bahsettiğimiz garip çekerler üzerinde yapılan boyut incelemeleri de fraktal sonuçlar vermekte. Yüksek karmaşıklığa sahip bu grafiklerin sadece görsel olarak değil, sayısal ve matematiksel olarak da fraktal yapıda olduklarını böylece gösterebiliyoruz (yani, Hausdorff-Besicovitch boyutları, topolojik boyutlarından daha büyük).

Sonuçta gelineen noktada ilginç bir durum da karşımıza çıkıyor: Nasıl ki Öklid geometrisinin noktaları, çizgileri, düzlemleri ve küpleri aslında birer idelalleştirme ise, sıfır,bir-iki ve üç boyut kavramları da aslında bizler için birer idealleştirmeden ibaret olabilir. İnsan beyni, etrafındaki evreni basitleştirerek algılamaya yönelik olarak çalışan bir aygıt olduğundan bu durum çok da şaşırtıcı olmasa gerek. Karmaik matematiksel tekniklerin ve bilgisayarların gelişimine kadar beklemesi gereken bu fraktal ve kaotik yapı-süreç anlayışı, etrafımızdaki hiç bir şeyin aslında o kadar basit olmadığını bize bir kez daha farketiriyor.